


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО ВГУ)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
алгебры и математических
методов гидродинамики

 (Звягин В.Г.)
подпись, расшифровка подписи
14.04.2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.12 Дифференциальная геометрия и топология

1. Шифр и наименование направления подготовки:

01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма образования: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики

6. Составители программы: доцент, к.ф.-м.н. Звягин Андрей Викторович

7. Рекомендована: НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 24.03.2022 г.

8. Учебный год: 2023-2024

Семестр(-ы): 3

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью курса является освоение основных понятий и фактов дифференциальной геометрии и топологии, овладение основными методами решения задач.

Задачи учебной дисциплины:

- ознакомление с основными топологическими структурами;
- овладение основными методами решения задач, выработка навыков и умений по применению полученных знаний при решении задач дифференциальной геометрии и топологии и других математических дисциплин

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Блок 1. Обязательная часть

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, алгебра, аналитическая геометрия.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, элементами линейной алгебры, обладать полными знаниями курса аналитической геометрии.

11. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Применяет базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук	Знать: концептуальные основы методов решения задач в предметной области; основные методы доказательства математических утверждений Уметь: формулировать постановки основных задач дифференциальной геометрии и топологии, в том числе на касательных плоскостях и многообразиях, формулировать и доказывать теоремы существования, единственности. Владеть: теоретическими подходами к решению задач дифференциальной геометрии и топологии; навыками работы в информационных современных системах
		ОПК-1.2	Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Знать: зарубежную и отечественную литературу в области дифференциальной геометрии и топологии, общие формы закономерности теории дифференциальной геометрии и топологии Уметь: грамотно и правильно представлять свои результаты Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами
		ОПК-1.3	Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: методы решения задач в области дифференциальной геометрии и топологии Уметь: работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представлять свои результаты Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в предметной области
УК-1	Способен осуществлять	УК-1.1	Анализирует проблемную	Знать: составляющие части в области дифференциальной геометрии и

	поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач		ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними	топологии, их связи Уметь: решать задачи дифференциальной геометрии и топологии как систему, выявить составляющие части, устанавливать связи между ними Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, направленными на решение проблемных ситуаций предметной области
		УК-1.2	Используя логико-методологический инструментарий, критически оценивает надежность источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей предметной области	Знать: концептуальные основы методов решения задач в области дифференциальной геометрии и топологии Уметь: работать с различными источниками научной информации, используя логико-методический инструментарий Владеть: навыками работы в информационных современных системах, критериями проверки источников информации

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 3/108.

Форма промежуточной аттестации: экзамен

13. Трудоемкость по видам учебной работы:

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		3
Аудиторные занятия	50	50
в том числе:		
лекции	16	16
практические	34	34
лабораторные	-	-
Самостоятельная работа	22	22
Контроль	36	36
Итого:	108	108

13.1 Содержание разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1	Плоские и пространственные кривые.	Плоские кривые. Касательный вектор. Натуральный параметр плоской кривой. Нормаль, кривизна. Пространственные кривые. Формулы Френе.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24750
2	Поверхность, касательная плоскость. Метрика касательной плоскости. Метрика поверхности	Поверхность, касательная плоскость. Метрика касательной плоскости. Метрика поверхности	

3	Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна поверхности.	Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна поверхности.	
4	Многообразия.	Определение гладкого многообразия, примеры. Карты, атласы, замены координат. Определение гладкой функции на многообразии. Поверхности как многообразия. Теорема Уитни (без доказательства) Проективная плоскость. Касательное пространство. Касательное расслоение. Касательное отображение. Дифференциал отображения.	
2. Практические занятия			
1	Плоские и пространственные кривые.	Плоские кривые. Касательный вектор. Натуральный параметр плоской кривой. Нормаль, кривизна. Пространственные кривые. Формулы Френе.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11187
2	Поверхность, касательная плоскость. Метрика касательной плоскости. Метрика поверхности	Поверхность, касательная плоскость. Метрика касательной плоскости. Метрика поверхности	
3	Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна поверхности.	Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна поверхности.	
4	Многообразия.	Определение гладкого многообразия, примеры. Карты, атласы, замены координат. Определение гладкой функции на многообразии. Поверхности как многообразия. Теорема Уитни (без доказательства) Проективная плоскость. Касательное пространство. Касательное расслоение. Касательное отображение. Дифференциал отображения.	

13.2 Разделы дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Плоские и пространственные кривые.	4	8	-	5	17
2	Поверхность, касательная плоскость. Метрика касательной плоскости. Метрика поверхности	4	8	-	6	18
3	Вторая квадратичная форма.	4	8	-	6	18

	Нормальная кривизна поверхности.					
4	Многообразия.	4	10	-	5	19
	Экзамен					36
	Итого	16	34	-	22	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Дифференциальная геометрия и топология» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены также на сайте факультета https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов Интернет, необходимых для освоения дисциплины:

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко А.Т. - М.: Физматлит, 2010.- 512 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=617
2	Борисович Ю.Г. Введение в топологию. / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко.- М.: URSS, 2015.- 415 с. https://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=Ru&blang=ru&page=Book&id=181559

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Стинрод Н. Первые понятия топологии: Геометрия отображений отрезков, кривых, окружностей и кругов / Н. Стинрод, У. Чинн; Пер. с англ. И. А. Вайнштейна.—Новокузнецк: Новокузнец. физ.-мат. ин-т, 2000.—223 с.
4	Новиков С. П. Топология / С.П. Новиков.—2-е изд., испр. и доп.—М.;Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.—335 с.
5	Гликлик Ю.Е. Что такое гладкое многообразие? /Ю.Е. Гликлик // Соросовский образовательный журнал.- 1998.- № 11.- С. 155-159
6	Гликлик Ю.Е. О понятиях топологического пространства и непрерывного отображения. /Ю.Е. Гликлик // Соросовский образовательный журнал.- 2000.- Т. 6.- № 11.- С. 116-121.
7	Погорелов А. В.. Дифференциальная геометрия: Учеб. для студ. мат. спец. ун-тов и пед. ин-тов./

	А.В. Погорелов.—6-е изд., стер.—М.: Наука, 1974.—176 с.
8	Гликлих Ю.Е. Топология и дифференциальная геометрия (Пятое издание) / Ю.Е. Гликлих.- Воронеж: ВГУ, 2010.- 100 с.
9	Гликлих Ю.Е. Топология и дифференциальная геометрия (Четвертое издание) / Ю.Е. Гликлих.- Воронеж: ВГУ, 2007.- 76 с. / http://www.math.vsu.ru/chair/alg/jul07001.pdf
10	Гликлих Ю.Е. Геометрия многообразий, мотивированная математической физикой. Издание второе, переработанное / Ю.Е. Гликлих.- Воронеж: ВГУ, 2009.- 132 с.
11	Виро О.Я. Задачи по топологии / О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов.- СПб: Издательство СПбГУ, 2000.- 208 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы

№ п/п	Источник
12	http://www.lib.vsu.ru - Электронный каталог ЗНБ ВГУ
13	https://lanbook.lib.vsu.ru - Электронно-библиотечная система издательства «Лань»
14	https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937 – Сайт факультета

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1	Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко А.Т. - М.: Физматлит, 2010.- 512 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=617
2	Борисович Ю.Г. Введение в топологию. / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко.- М.: URSS, 2015.- 415 с.
3	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы:

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на сайте «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11187>, <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24750>).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc*, *Math*, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

19. Фонд оценочных средств:

Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Плоские и пространственные кривые.	ОПК-1, УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, УК-1.1	Домашние задания, контрольная работа № 1

2	Поверхность, касательная плоскость. Метрика касательной плоскости. Метрика поверхности	ОПК-1, УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, УК-1.1	Домашние задания, контрольная работа № 1
3	Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна поверхности.	ОПК-1, УК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3, УК-1.2	Домашние задания, контрольная работа № 1
4	Многообразия.	ОПК-1, УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3, УК-1.1	Домашние задания, контрольная работа № 1
Промежуточная аттестация Форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену, успешная сдача контрольной работы

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашние задания:

По теме 1. Плоские и пространственные кривые

А.С. Феденко. Сборник задач по дифференциальной геометрии: учебное пособие / Феденко А.С. — М. : Наука, 1979. — 266 с.

Задания № 70, 73, 76, 82, 86-88, 108-110, 486-489

По теме 2. Поверхность, касательная плоскость. Метрика касательной плоскости.

Метрика поверхности

А.С. Феденко. Сборник задач по дифференциальной геометрии: учебное пособие / Феденко А.С. — М. : Наука, 1979. — 266 с.

Задания № 115-118, 125, 133-137, 144, 148, 160, 171, 547, 550, 575-578

По теме 3 Вторая квадратичная форма. Нормальная кривизна поверхности

А.С. Феденко. Сборник задач по дифференциальной геометрии: учебное пособие / Феденко А.С. — М. : Наука, 1979. — 266 с.

Задания № 339, 348-352, 356, 358, 372, 740, 750, 751, 768-770

По теме 4. Многообразия

А.С. Феденко. Сборник задач по дифференциальной геометрии: учебное пособие / Феденко А.С. — М. : Наука, 1979. — 266 с.

Задания № 437, 442-448, 483, 486-488, 521, 532, 547

Примерный перечень задач для контрольной работы №1:

Контрольно-измерительный материал № 1.

Задание № 1

Теорема. Пусть X – топологическое пространство с топологией τ , Y – топологическое пространство с топологией σ и $F: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Если X компактно, то и $F(X)$ компактно.

Задание № 2

В произвольном топологическом пространстве открытые и замкнутые множества связаны друг с другом следующим образом:

- замкнутое множество всегда является дополнением до некоторого открытого
- замкнутое множество всегда является дополнением до всех открытых
- замкнутое множество всегда является пересечением двух открытых
- правильный ответ здесь не указан

Задание № 3

Какова правильная формулировка критерия непрерывности отображения f , действующего из топологического пространства X в топологическое пространство Y : отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда

- а) прообраз любого открытого в Y множества открыт в X
- б) прообраз любого замкнутого в Y множества открыт в X
- в) прообраз любого открытого в Y множества замкнут в X
- г) прообраз любого открытого в X множества открыт в Y

Задание № 4

Две поверхности $r(u,v)$ и $R(u,v)$ соприкасаются, если при соответствующем выборе систем координат (u,v)

- а) они пересекаются в некоторой точке (u^*,v^*)
- б) они пересекаются в некоторой точке (u^*,v^*) и в этой точке совпадают их первые частные производные
- в) они пересекаются в некоторой точке (u^*,v^*) и в этой точке совпадают их первые частные производные и вторые частные производные
- г) они пересекаются в некоторой точке (u^*,v^*) и в этой точке совпадают только их вторые частные производные

Задание №5. Задача на пятерку.

На треугольнике ABC в плоскости задать структуру одномерного гладкого многообразия, т.е. предъявить такой атлас, что замены координат между его картами являются гладкими.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:

Определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной работы.

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться любой литературой и конспектом лекций, ограничение по времени 90 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 120 минут.

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине

«Дифференциальная геометрия и топология» проводится в форме экзамена. предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестр. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении экзамена учитываются результаты контрольной работы и учитывается выставляемая преподавателем оценка за работу в ходе практических занятий.

Если у обучающегося есть положительная оценка по контрольной работе и положительная оценка работы в ходе обучения по практике, то оценка по экзамену выставляется как среднее арифметическое данных четырех оценок с округление десятых долей по математическим правилам. Если обучающийся не имеет положительной оценки контрольной работе или практике, или не согласен с этой оценкой, он может ответить на соответствующие вопросы в ходе экзамена.

Примерный перечень вопросов:

1	Плоская кривая
2	Касательный вектор
3	Длина дуги. Натуральный параметр
4	Кривизна
5	Нормаль кривой
6	Угол между кривыми
7	Формулы Френе
8	Пространственные кривые
9	Репер Френе
10	Поверхность. Касательная плоскость
11	Первая квадратичная форма
12	Кривизна в данном направлении
13	Вторая квадратичная форма
14	Главные кривизны поверхности
15	Типы точек поверхности
16	Замыкание множества
17	Непрерывные отображения
18	Гомеоморфизм
19	Действия над пространствами
20	Связность
21	Топологическое пространство
22	Типы точек пространства относительно данного множества
23	Компактность
24	Топологические многообразия
25	Классификация двумерных многообразий

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие **показатели:**

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи
- 3) умения применять знания в профессиональной сфере;
- 4) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов экзамена используется **шкала:** «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
---------------------------------	--------------

Полный и правильный ответ на оба вопроса билета.	Отлично
Неточности в ответе на вопросы билета.	Хорошо
Существенные недочеты в ответе на вопросы билета.	Удовлетворительно
Полностью не раскрыт, по крайней мере, один вопрос билета.	Неудовлетворительно

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

№1. Набор τ подмножеств множества X называется топологией, если он обладает следующими свойствами: (i) X и пустое множество входят в τ ;

(ii) объединение любого числа множеств из τ принадлежит τ ;

(iii) пересечение конечного числа множеств из τ принадлежит τ .

Если набор τ задан, (X, τ) называется

а) топологическим пространством;

б) линейным пространством;

в) метрическим пространством.

№2 Точка x_0 топологического пространства (X, τ) называется предельной точкой множества $A \subset X$, если в любой ее окрестности содержится точка из $A \setminus \{x_0\}$.

а) не равная x_0 ;

б) равная x_0 .

№3 Отображение f называется непрерывным в точке $x \in X$, если для любой окрестности $U \in \sigma$ точки $f(x)$ в Y существует окрестность $V \in \tau$ точки x в X такая, что из того, что точка x' принадлежит V следует, что $f(x')$ принадлежит U .

а) непрерывным;

б) дифференцируемым.

№4 Топологическое пространство (X, τ) называется линейно связным, если любые его две точки можно соединить непрерывным путем.

а) непрерывным;

б) прерывистым.

№5 Топологическое пространство называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

а) конечное;

б) счётное.

№6 Является ли данное множество топологическим пространством: X — произвольное множество, τ содержит все подмножества множества X ?

да.

№7 Пусть $A = [0, 1]$ — отрезок вещественной прямой \mathbb{R}^1 с обычной топологией, тогда множество внутренних точек $[0, 1]$ равно?

$(0, 1)$

№8 Пусть $X = \mathbb{R}^1$ с обычной топологией и $A = (0, 1]$, $A \subset X$. Тогда граница A состоит из точек?

$0, 1$

№9 Пусть $X = \mathbb{R}^1$ с обычной топологией и $A = (8, 11]$, $A \subset X$. Тогда граница A состоит из точек?

$8, 11$

№10 Является ли данное множество топологическим пространством: X — произвольное множество, τ состоит из двух множеств X и \emptyset ?

да

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

3) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).

Программа рекомендована НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 24.03.2022 г.